Uniwersytet Śląski w Katowicach

Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii

Instytut Matematyki

Imię i nazwisko

Numer albumu 012345

RÓWNANIA FUNKCYJNE ORAZ ICH STABILNOŚĆ

PRACA DYPLOMOWA
LICENCJACKA (lub MAGISTERSKA/INŻYNIERSKA)

Promotor:
Dr Radosław Łukasik

Katowice 2019

Słowa kluczowe: równanie Cauchy'ego, Jensena, stabilność ....

....

Oświadczenie autora pracy

Ja niżej podpisany/a:

imię (imiona) i nazwisko Jan Kowalski ....

autor pracy dyplomowej pt. Klasyczne równania funkcyjne ....

....

....

Numer albumu: 012345

Student/ka Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach

kierunku studiów
Matematyka ....

specjalności
Matematyka nauczycielska ....

Oświadczam, że ww. praca dyplomowa:

- została przygotowana przeze mnie samodzielnie[1],
- nie narusza praw autorskich w rozumieniu ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (tekst jednolity Dz. U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631, z późn. zm.) oraz dóbr osobistych chronionych prawem cywilnym,
- nie zawiera danych i informacji, które uzyskałem/-am w sposób niedozwolony,
- nie była podstawą nadania dyplomu uczelni wyższej lub tytułu zawodowego ani mnie, ani innej osobie.

Oświadczam również, że treść pracy dyplomowej zamieszczonej przeze mnie w Archiwum Prac Dyplomowych jest identyczna z treścią zawartą w wydrukowanej wersji pracy.

Jestem świadomy/a odpowiedzialności karnej za złożenie fałszywego oświadczenia.

....

Data Podpis autora pracy

[1] uwzględniając merytoryczny wkład promotora (w ramach prowadzonego seminarium dyplomowego)

Spis treści

Wstęp

We wstępie opiszemy z grubsza co robimy w tej pracy.

Rozdział 1

Pierwszy rozdział

Definicja 1.1. Funkcję $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ nazywamy addytywną wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia ona równanie Cauchy'ego, to znaczy

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \; x, y \in \mathbb{R}^N. \tag{1.1}$$

Do równania (1.1) się tutaj odwołamy (1.1). Jest to równanie z definicji 1.1

Lemat 1.2. *Jeżeli* $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *jest addytywna to:*

$$f(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ *i dla wszystkich* $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{N}^N$.

Dowód: Zauważmy, że

$$f(\sum_{i=1}^{n+1} x_i) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i) + f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) + f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)$$

□

Lemat 1.3. *Jeżeli* $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *są funkcjami addytywnymi, to dla wszystkich* $a, b \in \mathbb{R}$ *funkcja* $f = af_1 + bf_2$ *jest addytywna.*

Dowód: Ustalmy $x, y \in \mathbb{R}^N$. Wówczas

$$\begin{aligned} f(x+y) &= af_1(x+y) + bf_2(x+y) = a\Big(f_1(x) + f_1(y)\Big) + b\Big(f_2(x) + f_2(y)\Big) \\ &= af_1(x) + bf_2(x) + af_1(y) + bf_2(y) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

□

Rozdział 2

Rozdział drugi

Rozważmy równania funkcyjne:

$$E(x+y) = E(x)\cdot E(y) \tag{2.1}$$
$$L(xy) = L(x)+L(y) \tag{2.2}$$
$$M(xy) = M(x)\cdot M(y) \tag{2.3}$$

znane jako warianty równania Cauchy'ego.
Będziemy je odpowiednio nazywać: wykładnicze, logarytmiczne i multiplikatywne.

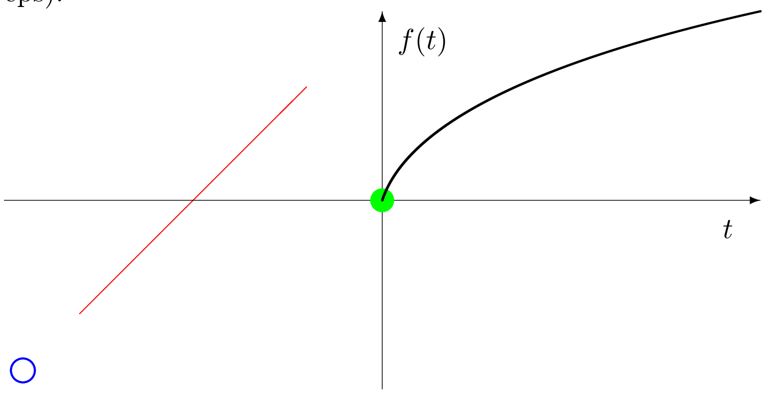
2.1 Równanie wykładnicze

Coś piszemy w podrozdziale.

2.2 Równanie logarytmiczne

Uwaga 2.1. Rozwiązania tego równania można znaleźć w [3]. Pewne uogólnienia znajdują się za to w pracy R. Łukasika (patrz [4, Theorem 2]).

Rozpatrzmy następujący wykres funkcji (lepiej robić w zewnętrznym programie w formacie eps):



$$\langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

$$n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Bibliografia

[1] J. Aczél, J. Dhombres, Functional Equations in Several Variables, Cambridge University Press, Cambridge (1989).

[2] Pl. Kannappan, Functional Equations and Inequalities with Applications, Springer, 2009

[3] M. Kuczma, Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, second edition, Birkhäuser, 2009.

[4] Radosław Łukasik, Some generalization of the quadratic and Wilson's functional equation, *Aequat. Math.* **87** (2014), 105–123.